

臺北市政府地政處暨所屬機關96年度自行研究報告



以 LAMBDA(最小二乘低相關化演算法)處理 GPS 週波未定值，縮短外業測量時間、保持成果精度之研究

研究人員：張伯偈

所屬機關：臺北市建成地政事務所

中華民國 96 年 9 月 29 日

目錄

| | |
|----------------|----|
| 壹、緒論..... | 3 |
| 貳、理論核心簡介..... | 7 |
| 參、研究方法..... | 13 |
| 肆、實驗成果與分析..... | 16 |
| 伍、結論與建議..... | 23 |
| 參考文獻 | |

壹 緒論

一、前言

自從 1950 年代人類成功發射了第一顆人造衛星起，衛星科技與時俱進，時至今日，衛星測量、定位技術在日常生活中的應用已經日漸普遍，而如何能提供給所有使用者最即時與最正確的空間位置資訊便成為一個相當重要且受到關注的課題。

虛擬距離觀測利用接收虛擬隨機噪聲（Pseudo Random Noise，簡稱 PRN）電碼，暫且忽略訊號傳遞過程當中的誤差不計的話，以訊號傳播時間與傳播速度乘積便可計算出衛星與接收儀間之瞬時距離。而載波相位觀測大體來說則是利用接收之載波個數與載波波長的乘積來計算衛星與天線之間的距離，載波相位觀測因為不受到衛星與接收儀之間相對運動所產生之都普勒（Doppler）效應影響，同時又可接收雙頻以上的訊號以增加觀測之可靠度，因此較為精密之測量工作諸如衛星控制點之測設皆採用載波相位觀測進行之。

本篇研究報告所探討的便是本處所屬各所隊在進行載波相位觀測當中，利用整數最小二乘平差方法求解整數週波未定值時，如何將原本具有高度相關性之觀測量降低其相關性以助加快搜尋整數週波值的演算策略，進而幫助縮短外業測量時間並維持成果品質之不墜。

二、研究目的

在 GPS 載波相位觀測作業當中，最大難題便在於整數週波未定值

(Integer Cycle Ambiguity) 之解算，肇因於其與點位坐標分量之間的高度相關性。求解之方法很多元，包括使用載波相位觀測量加上電碼觀測量以輔助求解週波未定值之寬巷法 (Wildlane)、對於點位坐標真值所可能分佈之立方體網格逐一做搜尋之未定值函數法 (Ambiguity Function Method) 等等，以及本報告之主體：將最小二乘平差方法引入幫助估計整數週波未定值之 Least-squares Ambiguity Decorrelation Adjustment (LAMBDA) [Teunissen, 1995, 1997]。

LAMBDA 之作法是先以觀測量去對座標分量與週波未定值進行實數解的解算，再以此實數解之方差、協方差矩陣去進行多組相近整數解的挑選，以多組候選之整數解各自進行改正數加權平方和的計算，最終是以具有最小的改正數加權平方和之該組整數解為最佳解。然而，若是沒有在事先進行解相關化 (decorrelation) 來降低相關性的動作，則在搜尋候選解時會因為高相關性造成搜尋範圍太大而相當不具效率，若是在經由良好之降低相關性的轉換之後，搜尋範圍便會大幅地縮小，也縮短了求整數週波未定值解所花費的時間。

在低相關化操作方面，可利用一些現成的方法提供協助，例如：Crout 矩陣因子分解[Burden and Faires, 2003]、Choleski's 矩陣因子分解[Rao, 2002]、聯合低相關化方法[Liu et. al., 1999]，白化濾波[Mohamed and Schwarz, 1998]；以及本論文中主要之研究對象：二維低相關化方法[Teunissen, 1995]等。

本研究報告旨在根據 Teunissen 針對 LAMBDA 所制訂之處理程序與規則中，設計出具效率之二維低相關化演算策略，並且將輔以實際的算例驗證，依實驗結果找出最有效之低相關化操作方法，同時提出對於演算策略選定之建議與心得，以期對本處所屬各所隊進行相關測量工作之效率增進有所貢獻。

三、 研究報告架構

本研究報告共分五個章節，各章節之重點如下：

壹 緒論

針對本研究報告之目的與概況作一個簡要的陳述，內容包含前言、研究目的以及研究流程等部分。

貳 理論核心簡介

GPS 載波相位觀測定位利用最小平方法求解整數週波未定值 (Least-squares Ambiguity Decorrelation Adjustment, LAMBDA) 原理。

參 研究方法

根據二維低相關化方法之規則，訂定演算策略，諸如最小方差法、最小相關法、最大相關法、最近似球形法、最接近整數法以及最小目標函數法，本報告採用最小方差法。

肆 實驗成果與分析

以實際之數據，套用第參部分所提出之演算策略進行實際地測試，並對於實驗結果作一效能之評估。

伍 結論與建議

針對提出之演算法成果進行建議，以期對於二維低相關化方法於 LAMBDA 當中之應用能有助益。

四、 研究流程

本報告主題在使用最小平方法平差解整數週波未定值時，其中所應用到的二維低相關技巧之建立，因此研究流程涵納了理論基礎研習、演算策略擬定、實驗以及最後的討論和建議等部分，可以由下圖 1.1 來表示。

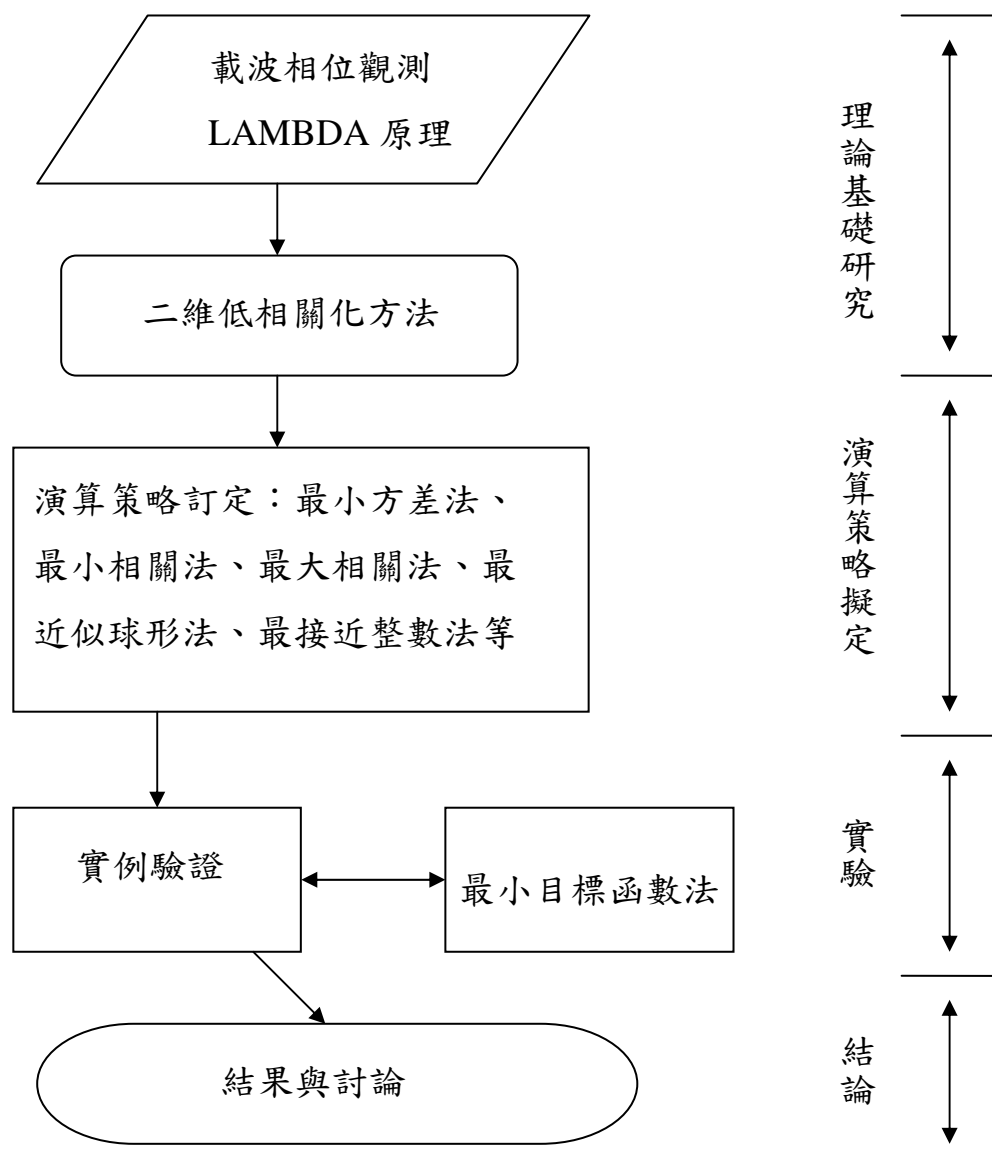


圖 1.1 研究流程圖

貳 理論核心簡介

一、週波未定值最小平方整數估計

在 GPS 載波相位觀測作業中，所接收的觀測量是衛星至接收儀之間載波訊號的相位變化，若欲得到精確之定位成果，必定要求解出整數週波未定值方能達成。

而根據這樣的作業需求，週波未定值最小平方整數估計法 (Least-squares AMBiguity Decorrelation Adjustment, LAMBDA) 於 1995 年被 Teunissen 所提出；這是一種非連續性的搜尋技巧，將週波未定值低相關化再進行最小平方估計之方法。簡單的說，就是一個未知數具有整數解約制的平差方法；有別於傳統的平差方法，所求得之答案為實數解。

進行平差的時候，採用下列的模式 [Teunissen, 1997]：

$$\mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{b} - \mathbf{L} \quad (2-1)$$

\mathbf{L} ：GPS 的觀測資料，維度為 $n \times 1$

\mathbf{a} ：週波未定值的參數，維度為 $m \times 1$

\mathbf{b} ：其他未定參數，維度為 $t \times 1$

\mathbf{A} ， \mathbf{B} 為維度 $n \times m$ 、 $n \times t$ 的設計矩陣

因為必須在週波未定值 \mathbf{a} 為整數的條件下進行最小平方估計，故利用最小平方原理和 \mathbf{a} 需為整數的條件，我們可以整理出式 (2-2) [Teunissen, 1995]

$$(\mathbf{L} - \mathbf{A}\check{\mathbf{a}} - \mathbf{B}\check{\mathbf{b}})^T \mathbf{Q}_L^{-1} (\mathbf{L} - \mathbf{A}\check{\mathbf{a}} - \mathbf{B}\check{\mathbf{b}}) = \min, \quad \check{\mathbf{a}} \in \mathbf{Z}^m, \check{\mathbf{b}} \in \mathbf{R}^t \quad (2-2)$$

\mathbf{Z}^m 表示一個 m 維整數空間向量， \mathbf{R}^t 表示一個 t 維實數空間向量， $\check{\mathbf{a}}$ 為滿足與實數解 $\hat{\mathbf{a}}$ 之間最小二乘平差之整數解， $\check{\mathbf{b}}$ 則為由整數解 $\check{\mathbf{a}}$ 之新實數解；式 (2-2) 的意義可以解讀為在滿足 $\check{\mathbf{a}} \in \mathbf{Z}^m, \check{\mathbf{b}} \in \mathbf{R}^t$ 之前提下，改正數加權平方和為最小之條件。因此，根據 (2-1) 與 (2-2) 式，可以列出一個帶有條件之間接平差式 [Teunissen, 1995]：

$$\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} = \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{Q}_L^{-1} \hat{\mathbf{e}} + (\hat{\mathbf{a}} - \check{\mathbf{a}})^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \check{\mathbf{a}}) \quad (2-3)$$

其求解的步驟主要可分解為以下三個動作 [Teunissen, 1995]：

1. 由觀測方程式，依最小二乘平差可求得 $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{bmatrix}$ ，此為 \mathbf{a}, \mathbf{b} 之實數估計，

同時也稱為浮點解 (float-solution)，而 $\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}} & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}} \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}} & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}} \end{bmatrix}$ 則為浮點解之協

方差矩陣。

2. 利用浮點解 $\hat{\mathbf{a}}$ 來計算其整數解 $\check{\mathbf{a}}$ (又稱為固定解 (fixed-solution))

$$(\hat{\mathbf{a}} - \check{\mathbf{a}})^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \check{\mathbf{a}}) = \min, \quad \check{\mathbf{a}} \in \mathbf{Z}^m \quad (2-4)$$

在 (2-4) 式中利用 $\check{\mathbf{a}}$ 為整數當作約制條件，再經由最小二乘平差去計算滿足改正數加權平方和為最小之整數解。

3. 在滿足固定解 $\check{\mathbf{a}}$ 的情況之下，以浮點解 $\hat{\mathbf{b}}$ 進行平差計算獲得新實數

估計 $\tilde{\mathbf{b}}$

LAMBDA 使用之整數最小平方估計對於搜尋整數解來說，擁有較佳之搜尋成功機率，其他方法的成功率都是低於或最多相等於使用整數最小平方估計 (Integer Least Squares Estimator)；此因整數最小平方估計所構築之搜尋空間不存在空隙也不會重疊所致。[Teunissen, 1999]

二、二維低相關化技巧

在利用 LAMBDA 求解整週波未定值之過程當中，週波未定值之搜尋空間由下式定義：

$$(\hat{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{a}})^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{a}}) \leq \chi^2 \quad (2-5)$$

χ^2 所代表的就是搜尋空間超橢球 (hyper-ellipsoid) 範圍之大小，其值至少需包含一個整數格點，若此值太大，可能所包含之整數格點太多而不利於搜尋；另外，超橢球之方位及扁率則是由 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}$ 所決定。

二維低相關化技巧就是對於整週波未定值之協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}$ 反覆進行二維的區間操作計算以求得一整數轉換矩陣 \mathbf{Z} ，將原本之週波未定值協方差矩陣低相關化轉換後，再來對其進行搜尋整週波未定值之動作。

其操作過程可簡單表示如下 (Teunissen, 1995)：

協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}$

$$\text{轉換矩陣 } \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{m \times m}(j, i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \mathbf{Z}_{j,i} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

$$\text{其中， } \mathbf{Z}_{j,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}] & 1 \end{bmatrix}, \sigma_{i,i} < \sigma_{j,j} \quad (2-7)$$

$\sigma_{i,i}$ 是協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ 中的第 (i,i) 項元素，其值為 σ_i^2 。 $\sigma_{j,j}$ 是協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ 中的第 (j,j) 項元素，其值為 σ_j^2 。 $\sigma_{j,i}$ 是協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ 中的第 (j,i) 項元素。 $[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}]$ 則是 $\sigma_{j,i}$ 除 $\sigma_{i,i}$ 之商數值小數部分四捨五入，為一整數值。

二維轉換操作便是反覆生產有效之二維整數轉換矩陣 $\mathbf{Z}_{j,i}$ ，此處有效意即 $|-\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}|$ 之值需大於 0.5，最後可以建立起 $\mathbf{Q}_{\hat{z}}$ 與 $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ 之關係如 (2-8) 式。

$$\mathbf{Q}_{\hat{z}} = \mathbf{Z}\mathbf{Q}_{\hat{a}}\mathbf{Z}^T \quad (2-8)$$

然而，對於該如何選取與決定二維整數轉換矩陣 $\mathbf{Z}_{j,i}$ ，並沒有明確的定義及規範；其中，因為不同之選取規則也會造成不同之演算次數以及演算時間長短，這部分之探討便是本報告之研究課題。

轉換後的協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{z}}$ 除了低相關化之外，其精度更是獲得了提升，並且，超橢球之容積維持不變。

可改寫 (2-5) 式，得到：

$$(\hat{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{z}})^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{-1} (\hat{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{z}}) = \sum_{i=1}^m \frac{(\hat{z}_{i|l} - \bar{z}_i)^2}{\sigma_{z_{i|l}}^2} \leq \chi^2 \quad (2-9)$$

為了瞭解低相關化之品質優劣，也就是轉換矩陣 \mathbf{Z} 是否為一個良好轉換矩陣，可用相關係數矩陣 \mathbf{R} 之行列式值平方根來判定，其定義為：

$$r^2 = \det(\mathbf{R}) \quad (2-10)$$

理想低相關化之結果為 $r = 1$ ，越不理想之低相關化，所算出之相關係數矩陣行列式值平方根 r 將越接近於0。

三、週波未定值的唯一性

在[黃文祺，2002]之研究中，比較過使用兩種不同方法進行低相關化操作。此處則提出一個更一般性的理論：以兩種不同低相關化方法對協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}$ 進行操作，可得到兩個整數變換矩陣 \mathbf{Z}_d 與 \mathbf{Z}_e ，最後所得之轉換後協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^d$ 和 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^e$ ，轉換前後之關係式為[Hsu，2004a]：

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^d = \mathbf{Z}_d \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}} \mathbf{Z}_d^T \quad (2-11)$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^e = \mathbf{Z}_e \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}} \mathbf{Z}_e^T \quad (2-12)$$

式中 $\mathbf{Z}_d \neq \mathbf{Z}_e$ ， $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^d \neq \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^e$ ，但是行列式值 $\det(\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^d) = \det(\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^e)$ 。則 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^d$ 和 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^e$ 之間的關係可由(2-13)與(2-14)式表示：

$$\mathbf{Z}_e = \pm \mathbf{U} \mathbf{Z}_d = \bar{\mathbf{U}} \mathbf{Z}_d \quad (2-13)$$

$$\mathbf{Q}_z^e = \mathbf{U}\mathbf{Q}_z^d\mathbf{U}^T = \overline{\mathbf{U}}\mathbf{Q}_z^d\overline{\mathbf{U}}^T \quad (2-14)$$

其中 \mathbf{U} 為一整數矩陣， $\det(\overline{\mathbf{U}}) = \pm 1$ 。則使用不同低相關化方法所得到之週波未定值整數解 $\check{\mathbf{a}}_e$ 與 $\check{\mathbf{a}}_d$ 之關係即如 (2-15) 式所示：

$$\check{\mathbf{a}}_e = \mathbf{Z}_e^{-1}\check{\mathbf{z}}_e = (\mathbf{Z}_d^{-1}\mathbf{U}^{-1})(\mathbf{U}\check{\mathbf{z}}_d) = \mathbf{Z}_d^{-1}\check{\mathbf{z}}_d = \check{\mathbf{a}}_d \quad (2-15)$$

由 (2-15) 式可知 $\check{\mathbf{a}}_e$ 與 $\check{\mathbf{a}}_d$ 之值相等；意即不論使用什麼方法進行低相關化操作，最終都可以得到唯一整數週波未定值之解答，差別僅在於搜尋空間超橢球之形狀、大小與方位。

參 研究方法

在 Teunissen 所提出之二維低相關化方法(2-D Decorrelation Approach)中，只闡述了每一次的低相關化操作是在一個二維區間內所進行，對於如何去選擇二維區間操作的對象卻沒有嚴格地定義；然而，在實驗中發現選取不同之方差、協方差組合對於解低相關化之疊代運算次數以及效率卻影響甚鉅，在[張伯偈，2005]的研究當中，針對二維低相關化方法的特性以目標函數分析訂定了最小方差法、最小相關法、最大相關法、最近似圓球法、最接近整數法等 6 種演算法，在此僅介紹經過實例驗證為最佳方法之最小方差法。

二維低相關化操作之目標函數可以寫為 (3-1) 式：

$$\Phi = \text{tr}(\Sigma_z) = \min \quad (3-1)$$

根據目標函數，以「方差削減最快」之原則（在兩次低相關化操作之間去觀察方差總和的變化，若是方差總和削減愈快則代表這個低相關化操作是愈有效的）可訂出最小方差法之演算步驟：

1. 將每一行元素皆除以同一行之對角線元素：

$$\text{原始方差-協方差矩陣 } \mathbf{Q}_{m \times m} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdots & \cdots & \sigma_{1,m} \\ \sigma_{2,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{m-1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_{m-1,m} \\ \sigma_{m,1} & \cdots & \cdots & \sigma_{m,m-1} & \sigma_{m,m} \end{bmatrix}$$

除以對角線元素之後，令 $\boldsymbol{\theta}_{m \times m} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma_{1,1}}{\sigma_{1,1}} & \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{1,1}} & \dots & \dots & \frac{\sigma_{1,m}}{\sigma_{1,1}} \\ \frac{\sigma_{2,1}}{\sigma_{2,1}} & \frac{\sigma_{2,2}}{\sigma_{2,1}} & \dots & \dots & \frac{\sigma_{2,m}}{\sigma_{2,1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\sigma_{m-1,m}}{\sigma_{m-1,m-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\sigma_{m,m}}{\sigma_{m,m}} \\ \frac{\sigma_{m,1}}{\sigma_{m,1}} & \dots & \dots & \frac{\sigma_{m,m-1}}{\sigma_{m,m-1}} & \frac{\sigma_{m,m}}{\sigma_{m,m}} \\ \frac{\sigma_{1,1}}{\sigma_{1,1}} & \dots & \dots & \frac{\sigma_{m-1,m-1}}{\sigma_{m-1,m-1}} & \frac{\sigma_{m,m}}{\sigma_{m,m}} \end{bmatrix}$$

2. 接著從 $\boldsymbol{\theta}_{m \times m}$ 中取出每一行之絕對值最大者 $\max|\theta_{j,i}|$ ， $j=1,2,\dots,m$ ，
 $i=1,2,\dots,m$ ， $i \neq j$ 存在一維陣列 \mathbf{M} 裡面

$$\mathbf{M} = \max(\boldsymbol{\theta}) = [|\bar{\theta}_1| \quad |\bar{\theta}_2| \quad \dots \quad \dots \quad |\bar{\theta}_m|]$$

式中 $|\bar{\theta}_i| (i=1,2,\dots,m)$ 表 $\boldsymbol{\theta}_{m \times m}$ 矩陣的 i 行元素中絕對值最大者，即 $\max|\theta_{j,i}|$

3. 以陣列 \mathbf{M} 裡面之各元素，分別計算其相應之 $S_{j,i}$ 存在陣列 \mathbf{S} 內

$$\mathbf{S} = \{S_{j,i}\}, \quad S_{j,i} = (\theta_{j,i}^2 - \delta_{j,i}^2)\sigma_{i,i}, \quad i=1,2,\dots,m$$

4. 從 \mathbf{S} 中取出最大之 $S_{j,i}$ ，以其相應之方差、協方差元素進行低相關化

相應之轉換矩陣 $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{m \times m}(j,i) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \mathbf{Z}_{j,i} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{Z}_{j,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}] & 1 \end{bmatrix}$ ， $\sigma_{i,i} < \sigma_{j,j}$

二維轉換操作： $\mathbf{Q}_z = \mathbf{Z}\mathbf{Q}_{m \times m}\mathbf{Z}^T$

5. 重複步驟 1~4 之運算，停止條件為 $\max(M) < 0.5$

肆 實驗成果與分析

一、實驗背景說明

本實驗當中，所採用之實驗數據取自[劉格非，2001]裡，由點號 227 與 228 所構成之長度約 100 公尺的短基線。對於 GPS 相對定位而言，基站與接收站之間的距離若小於數公里，則此基線兩端之大氣狀況可視為相當，意即可以差分方式將兩接收儀之電離層延遲誤差等誤差所造成之影響加以降低。

本實驗數據採用靜態觀測，作業時盡可能避免測站附近有水體或反射物並注意仰角 15 度以上無對空遮蔽；每 5 秒鐘接收一筆觀測量，觀測時間由 2000 年 9 月 7 日 16:20 至 2000 年 9 月 7 日 16:25，共 5 分鐘，合計 60 筆資料。觀測 6 顆衛星編號為 21、30、29、25、5、6，測站 228 為固定點，其 WGS84 三維坐標如表 4.1 所示。

表 4.1 點 228 之 WGS84 三維坐標

| 坐標（單位：公尺） | | |
|-----------------|--------------|--------------|
| X | Y | Z |
| -299956966.5600 | 4952759.2380 | 2670110.2240 |

週波未定值參數之協方差矩陣：

$$\hat{\mathbf{Q}}_a = \begin{bmatrix} 2209.71 & & & & & \\ 356.93 & 2049.68 & & & & \\ -11.18 & 23.26 & 1173.46 & & & \\ 330.74 & 442.27 & 358.69 & 908.06 & & \\ 274.88 & -138.11 & 26.88 & 252.80 & 923.94 & \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

$\hat{\mathbf{Q}}_a$ 根據二維低相關的規則，已經無法再進行進一步的低相關化操作，此處也將其視為 \mathbf{Q}_a 的最低相關形式。在本章之實驗中，演算法操作亦將以(4-1)式作為停止低相關運算時之檢核條件。而協方差矩陣 \mathbf{Q}_a 之相關係數矩陣 \mathbf{R} 如(4-2)式。

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1.000 & & & & & \\ 0.991 & 1.000 & & & & \\ -0.883 & -0.825 & 1.000 & & & \\ 0.995 & 0.987 & -0.850 & 1.000 & & \\ 0.984 & 0.956 & -0.907 & 0.987 & 1.000 & \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

經過低相關化之後，對角線元素和由 1.2828×10^6 降至 7264.9。協方差矩陣 \mathbf{Q}_a 之相關係數矩陣行列式值平方根 r 由 4.188×10^{-6} 提高至 0.78493。由這兩個數值的變化也可一窺低相關操作對於搜尋整數週波未定值之助益。

二、最小方差法之實驗成果及分析

以最小方差法處理協方差矩陣 \mathbf{Q}_a ，簡單地說就是在候選之方差-協方差組合裡面挑出一組使以此組合進行二維低相關化操作之後可以得到一個對角線元素和為最小的成果；實際操作的流程是計算每一行所對應之最大的方差削減值，經比較後決定應當選用之方差-協方

差組合。經過 22 次計算，協方差矩陣達到一最完整之低相關化結果。每次低相關化處理之後，其每一次疊代運算之後所得的對角線元素和整理如表 4.2，以及各次疊代運算之後對角線元素和之變化圖如圖 4.1 所示。

表 4.2 最小方差法之矩陣對角線元素和

| 疊代次數 | 對角線元素和 | 疊代次數 | 對角線元素和 |
|------|-------------|------|-------------|
| 1 | 7.8895e+005 | 12 | 1.6618e+004 |
| 2 | 3.5583e+005 | 13 | 1.5747e+004 |
| 3 | 1.7736e+005 | 14 | 1.4621e+004 |
| 4 | 1.2074e+005 | 15 | 1.1742e+004 |
| 5 | 9.1348e+004 | 16 | 1.1216e+004 |
| 6 | 7.2996e+004 | 17 | 9.4434e+003 |
| 7 | 5.8970e+004 | 18 | 9.0249e+003 |
| 8 | 4.7275e+004 | 19 | 8.6066e+003 |
| 9 | 3.6604e+004 | 20 | 8.1358e+003 |
| 10 | 2.7731e+004 | 21 | 7.4555e+003 |
| 11 | 2.1467e+004 | 22 | 7.2648e+003 |

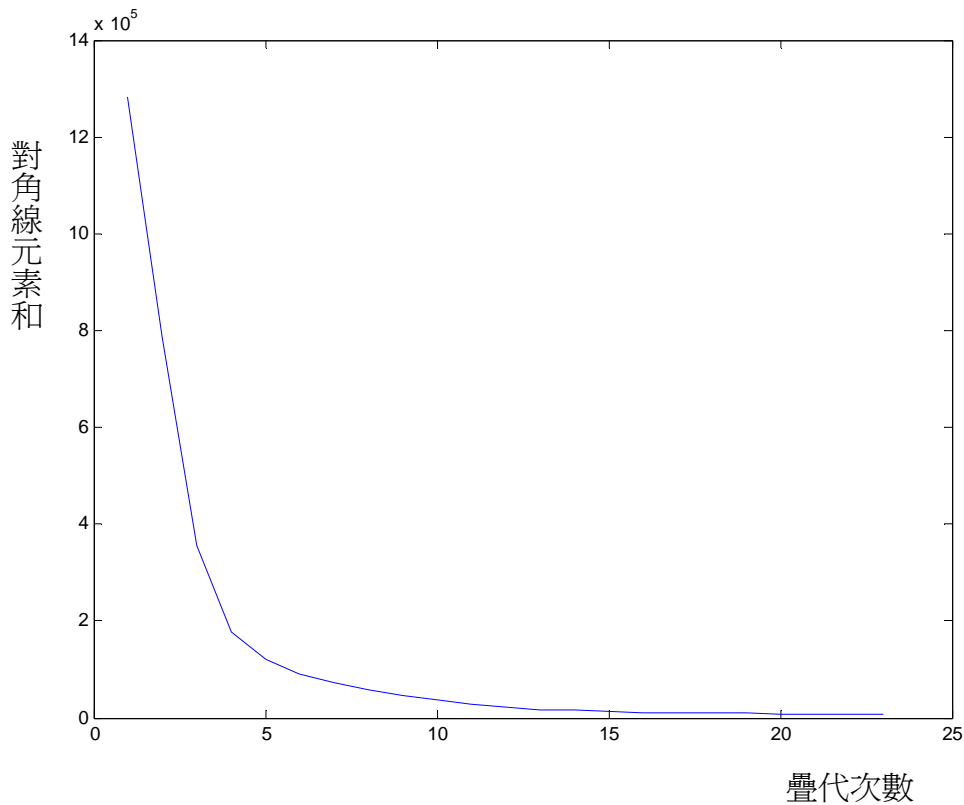


圖 4.1 最小方差法之矩陣對角線元素和變化圖

由表 4.2 及圖 4.1 中所顯示，最小方差法（Minimum Variance Approach）曲線在前五次疊代運算呈現陡直的走勢，雖然曲線的切線斜率漸趨和緩；但是，就趨勢而言，斜率是遞減而沒有出現跳動的現象，代表此演算策略是一穩定的操作方法。將每一次之削減量除以每一次低相關化操作前之對角線元素和，可以得到一個每次操作的削減比例，更能顯示出每一個段落運算的特徵，如表 4.3。而經過低相關轉換後之協方差矩陣，其搜尋空間超橢球之變化可以由相關係數矩陣之行列式值平方根 r 之變化來觀察，如表 4.4。

表 4.3 最小方差法之矩陣對角線元素和削減比例

| 疊代次數 | 削減百分比% | 疊代次數 | 削減百分比% |
|------|--------|------|--------|
| 1 | 38.499 | 12 | 22.585 |
| 2 | 54.898 | 13 | 5.243 |

| | | | |
|----|--------|----|--------|
| 3 | 50.156 | 14 | 7.147 |
| 4 | 31.925 | 15 | 19.689 |
| 5 | 24.343 | 16 | 4.480 |
| 6 | 20.090 | 17 | 15.811 |
| 7 | 19.214 | 18 | 4.431 |
| 8 | 19.832 | 19 | 4.635 |
| 9 | 22.573 | 20 | 5.470 |
| 10 | 24.240 | 21 | 8.361 |
| 11 | 22.589 | 22 | 2.557 |

表 4.4 最小方差法之矩陣相關係數矩陣行列式值平方根

| 疊代次數 | r | 疊代次數 | r |
|------|-------------|------|---------|
| 1 | 2.5613e-005 | 12 | 0.10237 |
| 2 | 0.00010254 | 13 | 0.11344 |
| 3 | 0.00037467 | 14 | 0.13505 |
| 4 | 0.00078686 | 15 | 0.24047 |
| 5 | 0.0012788 | 16 | 0.26957 |
| 6 | 0.0021218 | 17 | 0.4606 |
| 7 | 0.0053868 | 18 | 0.48843 |
| 8 | 0.0091456 | 19 | 0.59031 |
| 9 | 0.017884 | 20 | 0.63658 |
| 10 | 0.030403 | 21 | 0.72801 |
| 11 | 0.047971 | 22 | 0.78493 |

即便是做完全部 22 次的疊代運算，此演算法因計算步驟簡單、所以僅花費了 0.020 秒，更遑論當對角線元素和降至某程度之後對於整數解的搜尋範圍便已幾乎固定，這樣的成果可以說是將解算週波未定值之作業時間壓縮至極低，GPS 載波相位觀測資料最棘手的一部份變得不費吹灰之力。

而 LAMBDA 本身對於解算週波未定值之助益，由其他演算法之綜合表現亦可看出，如表 4.5 所示，即使是疊代運算總數最多、運算

時間最長也不過分別是 36 次以及 0.571 秒。

表 4.5 各演算法之綜合比較

| 名稱 \ 指標 | 方差和 減少 50% | 方差和 減少 66.7% | 相關 係數 低於 0.9 | 相關 係數 低於 0.7 | 疊代 總數 | 執行時間 |
|---------|------------------|--------------------|-----------------------|-----------------------|----------|-------|
| 最小方差法 | 2 | 2 | 6 | 16 | 22 | 0.020 |
| 最小相關法 | 2 | 2 | 15 | 21 | 25 | 0.130 |
| 最大相關法 | 3 | 3 | 12 | 18 | 21 | 0.144 |
| 最近似球形法 | 2 | 2 | 11 | 23 | 26 | 0.248 |
| 最接近整數法 | 4 | 8 | 23 | 31 | 36 | 0.571 |
| 最小目標函數法 | 1 | 1 | 5 | 15 | 21 | 0.200 |

伍 結論與建議

一、對於欲採用 LAMBDA 進行整數週波未定值求解之作業，本文建議使用最小方差法（Minimum Variance Approach）當作二維低相關化操作策略，雖然最小方差法在疊代運算次數上比單一演算策略最佳次數多了一次，但是這無損其程式執行時間上的絕對優勢，且其程式撰寫至為簡易。

二、LAMBDA 因為觀測資料經過低相關化預處理、縮小整數解搜尋範圍再行平差計算，其求解成功率高、抵抗週波脫落等雜訊影響之能力強；意即解算所需求之資料量門檻較低，不僅有助於內業計算速度之加快、亦可縮短外業測量之時間，對於儀器耗損、測量人員人力之節約使用均有所裨益。

三、目前本處所屬各所隊當中，以土地開發總隊第三科之業務與本研究成果最為息息相關，除了在本市控制網之建立（四等衛星控制點），尚有因應各地政事務所提出的圖根點補建需求之測量工作亦可應用，不但縮短作業時程增加工作效率、亦能減少同仁工作的辛勞。

參 考 文 獻

- [1] Faires, J.D. and Burden, R., 2003, “Numerical Methods”, Thomson Brooks/cole, Chapter 6, pp. 272-284
- [2] Hsu, R.S., 2002, “Adjustment treatments of Surveying measurements”, National Taiwan University, Chapter 4, pp. 27-55
- [3] Hsu, R.S., 2004a, “An orientation-varying consideration in the least-squares ambiguity decorrelation adjustment”, Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol.27, No.5, pp.689-694
- [4] Hsu, R.S., 2004b, “Mathematical explanation of method-independence and approaches to the 2-dimensional transformation in the LAMBDA”, manuscript
- [5] Rao, S.S., 2002, “Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists”, Prentice Hall, Chapter 3, pp. 172
- [6] Teunissen P.J.G., 1993, “Least-squares estimation the integer GPS ambiguities”, Invited lecture, Sect. 4 Theory and Methodology, IAG general meeting, Beijing
- [7] Teunissen P.J.G., 1995, “The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: a method for fast GPS integer ambiguity estimation.”, Journal of Geodesy 70, pp. 65-82
- [8] Teunissen P.J.G., 1997, “The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: its performance on short GPS baselines and short observation spans”, Journal of Geodesy 71, pp. 589-602

- [9] Teunissen P.J.G., 1999, “An optimality property of the integer least-squares estimator”, *Journal of Geodesy* 73, pp. 587-593
- [10] Liu L.T., Hsu H.T., Zhu Y.Z., Ou J.K., 1999, “A new approach to GPS ambiguity decorrelation”, *Journal of Geodesy* 73, pp. 478-490
- [11] Mohamed, A.H. and Schwarz, K.P., 1998 “A simple and economical algorithm for GPS ambiguity resolution on the fly using a whitening filter”, *Navigation*. Vol. 45, no. 3, pp. 221-231
- [12] 劉格非，尤碧海，2001，“石門大圳幹渠管理自動化工程簡介”，*農田水利*，48卷，8期，pp. 14-23
- [13] 黃文祺，2002，“以低相關化技巧求解週波未定值時超橢球方位變化之探討”，國立台灣大學土木工程研究所碩士論文，第四章。
- [14] 張伯偈，2005，“LAMBDA法中二維低相關化求週波未定值演算策略之研究”，國立台灣大學土木工程研究所碩士論文。