

# 水火箭的世界

包舜華





要怎樣的組成機構才能稱的上是真實的火箭呢？首先要有『推進系統』，推進系統不外乎是一個高壓燃料槽與噴嘴。燃料經過燃燒之後產生高溫、高壓的流質，並經由噴嘴轉換成溫度較低、壓力較小但是流速極快的流質。最後火箭利用這些噴出的流質產生推力。另外火箭還必須擁有『穩定裝置』與『控制系統』，它們可以判別火箭發射後的位置與姿態並持續修正軌跡，負責火箭順利升空並持續飛行。最後必需要具有『軌道設計』，工程師事先會規劃好飛行軌道，以利於分析它的射程與落點是否符合任務需求。『籌載』就是火箭所攜帶的物品，也許是科學儀器、爆裂物乃至於人造衛星等。如果火箭本身有籌載的話，那面臨實際的飛行時可能更為複雜了。所以要成為一位火箭專家可是十分不易的。

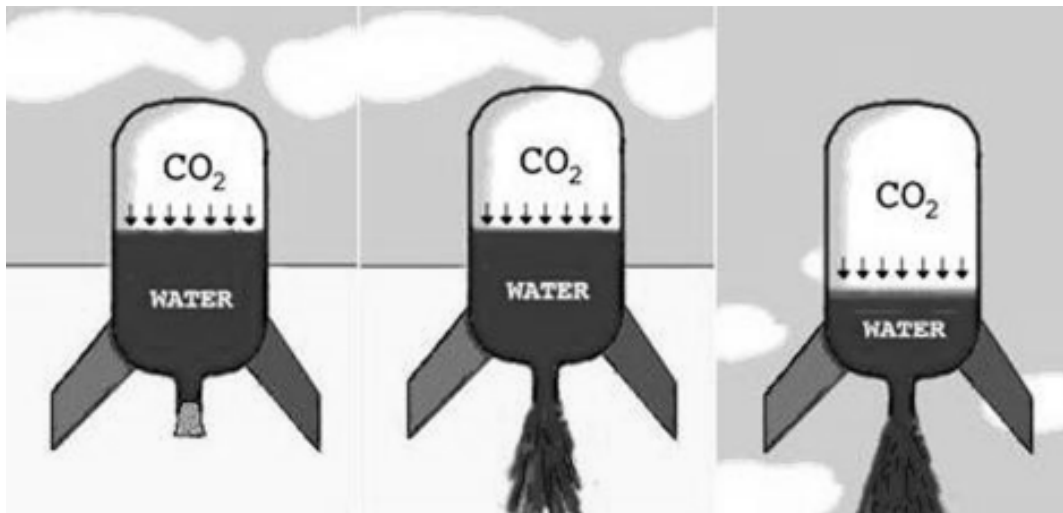
說到這裡，您可能會想到『水火箭』呢？雖然『水火箭』存在已久，但是大家可能對於它的飛行原理十分陌生。根據其中的一種說法，『水火箭』當初是因為工程人員為了在惡劣的地形下架設電線所發展出來的一種技術。慢慢地，由於環保人士以及玩具製造商的推動才有今日如此廣大的喜好者。不過『水火箭』除了好玩之

外，它本身卻是一個非常有趣的物理課題。就像真的火箭一樣，它應用了流體力學與飛行力學等領域，並結合個人的工藝技巧與創造力才能完成。本期我們希望藉由這一個流行已久的玩具，詳細說明水火箭的工作原理，並探討與改善它們的推進效率。

目前坊間玩水火箭的風氣已從西方吹拂至台灣。利用保特瓶、打氣筒以及閥門就可以玩得不亦樂乎！不過我們科學實驗室的內容主要是以物理與數學的觀點來分析水火箭的運動。告訴您火箭飛行的原理，以及它們的彈道分析。或許您很快就會發現，到底保特瓶要裝多少水才能飛得最高？到底水火箭的落點在哪裡？讓我們一起進入另類的水火箭世界吧！

## 飛行原理

火箭的運動是依據牛頓的第三運動定律來產生速度的。簡單的說，就是作用力與反作用力的那套理論。當水火箭因本體內部的高壓空氣擠壓而噴出水花時，而得到相反水花方向的推進力，最後獲得速度的增加。（如圖一）



圖一

如果我們想要知道火箭到底可以增加多少速度，首先你必須知道水花到底有多少質量被噴出去以及水花被噴出去的速度（動量變化率）？另外必須知道水火箭當時的質量是多少？所以我們把以上的問題簡單歸納一下，可以發現這可是一件大工程哩！

### 水花被噴出去的速度：

水花被噴出去的速度與火箭本體的外型以及內部的氣壓有絕對的關係。除非您知道水火箭本體內的空氣壓力是多少，通常空氣壓力亦會隨著水的流失而導致壓力遞減。換句話，您必須能掌握任何時刻的水火箭內部空氣壓力以及它的水位。

### 水花被噴出去的質量：

若您知道水花被噴出去的速度之後，那水花被噴出去的質量就很容易解決了。只要知道水的密度、噴嘴的截面積與水花噴出的速度，就可以計算每秒鐘到底有多少水的質量被噴出。

### 水火箭當時的質量：

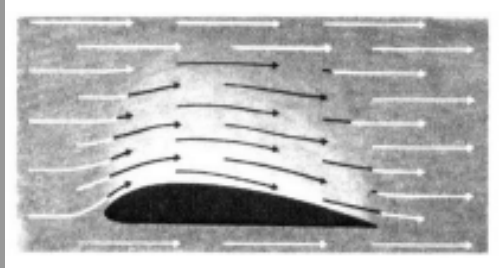
如果您真的能解決水火箭在任何時刻噴出水的質量是多少？那這個問題絕對難不倒您！加加減減每個時刻的質量後就一目了然了。

問題是，我什麼都不知道耶！真慘？#@

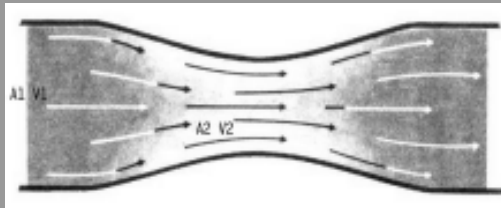
## 流體力學篇

### 我有辦法了

如果您在上高中時都全勤的話，那可能聽過『白努力方程式』，不是唸過什麼都沒學到的白努力喔！另外還有一個『連續



圖二



圖三

方程式』。

### 白努力方程式：

我們在上一期「空氣力學的世界」也提到過了。它是說明水的速度（動能）是可以與其壓力（壓力能）互換的關係式。為了滿足能量守恆，流動的水（水平流動時）在上游若是速度較慢、壓力較大，到下游後就會變成速度較快、壓力較小。（如圖二）因為水把壓力能轉換成動能了。可以用以下的數學式表示：

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{(V_1)^2}{2} = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{(V_2)^2}{2}$$

### 連續方程式：

聽過「物質不滅定律」吧！物質不可能無中生有，（如圖三）所以水火箭內部水耗損的質量一定等於噴出去的質量。如果用數學式表示的話，可寫成：



$$\rho_1 \cdot A_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot V_2$$

## 波以耳定律：

在一個氣密且溫度不變的空間，如果體積變大時，壓力會同時變小。體積與其壓力乘積會保持一個定值。（如圖四）數學式表示如下：

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$$

V is Volume  
P is Pressure

有了這幾個物理觀念之後，我們大概已經解決了所有水火箭的推力問題了。進行物理分析之前，我們必須給予水火箭的初始條件。這些初始條件的規格是可以任意更動的。不過我們在此以黑松汽水的胖胖瓶來當範例。

- 空瓶的體積：2.12 公升**
- 空瓶重量：0.15 公斤**
- 裝水的高度：0.13 公尺**
- 打氣壓力：3 大氣壓**
- 發射角：70 度**

## 步驟一

用直尺量出保特瓶的外型。我們總共量了 58 個點，至於其它的部分就用內差法來處理。若隨著瓶高畫出保特瓶的外型如圖五。

## 步驟二

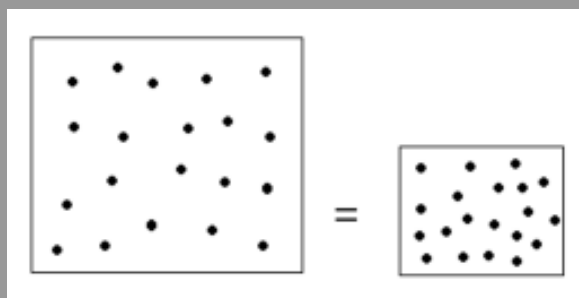
為了方便以下的說明，我們用一些符號來表示。

- 初始壓力  $P_0$
- 空瓶體積  $V_0$
- 水火箭飛行速度  $V$
- 一大氣壓  $P_a$
- 水的密度  $\rho$
- 空氣的密度  $\rho_{air}$
- 空瓶重量  $W_0$
- 水的噴出速度  $V_{out}$
- 初始水位  $h_0$
- 水位高度  $h$
- 定義函數  $A(h)$ ：瓶子在水位高  $h$  處的截面積
- $V(h)$ ：在瓶子水位高  $h$  以下的體積
- 所以  $A(0)$  表示瓶子噴嘴的截面積
- $V(h_0)$  表示水的初始體積
- $\rho V(h_0)$  表示水的初始質量

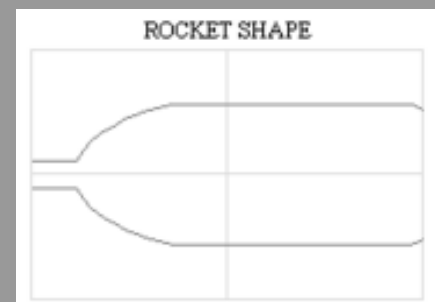
## 步驟三

根據白努力方程式我們可以寫成下式：

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 = \frac{P_a}{\rho} + \frac{V_{out}^2}{2}$$



圖四



圖五

## 步驟四

根據連續方程式，我們亦可列出下式：

$$A(h) \cdot \frac{dh}{dt} := A(0) \cdot V_{out}$$

## 步驟五

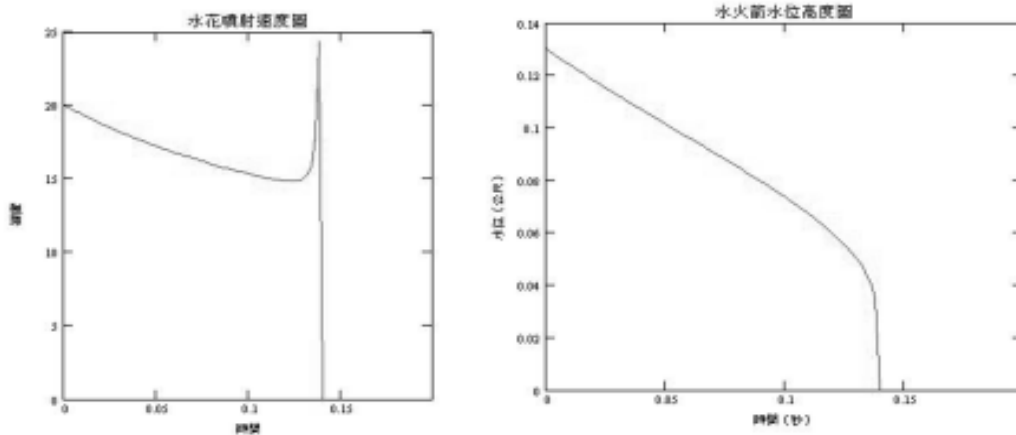
上兩式其中的壓力項，可以利用波以耳定律轉換成下式：

$$P_0 \cdot (V_0 - V(h_0)) = P \cdot (V_0 - V(h))$$

最後我們整理步驟三至四，可以得到燃料（水）質量隨時間遞減的方程式。

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-A(0)}{\sqrt{A(h)^2 - A(0)^2}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (V_0 - V(h_0)) \cdot P_0 - P_a}{\rho \cdot (V_0 - V(h))}}$$

這條方程式看起來頗為嚇人，又是積分又是微分的情形。不過沒關係，我們利用數值分析的技巧（Multi-Steps Runge-Kutta）來進行疊代計算，得到水位高度（左圖）與水花噴射速度（右圖）對時間的曲線圖。



在此要恭喜您，因為到此您已經解決了水火箭噴射推進與質量耗損等問題了。最後我們要利用以上的結果來作為水火箭的運動分析了，或稱為彈道分析。

## 飛行力學篇

根據「牛頓第三運動定律」：作用力與反作用力的力平衡方程式如下：

$$(W_0 + \rho \cdot V(h)) \cdot \Delta V + V_{out} \cdot \Delta(\rho \cdot V(h)) + K \cdot V^2 \cdot \Delta t + (W_0 + \rho \cdot V(h)) \cdot g \cdot \Delta t = 0$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot a_{air} \cdot C_d \cdot S_c$$



K 稱為阻力係數，大約等於  $0.46 \times$  水火箭最大截面積 (MKS 制)

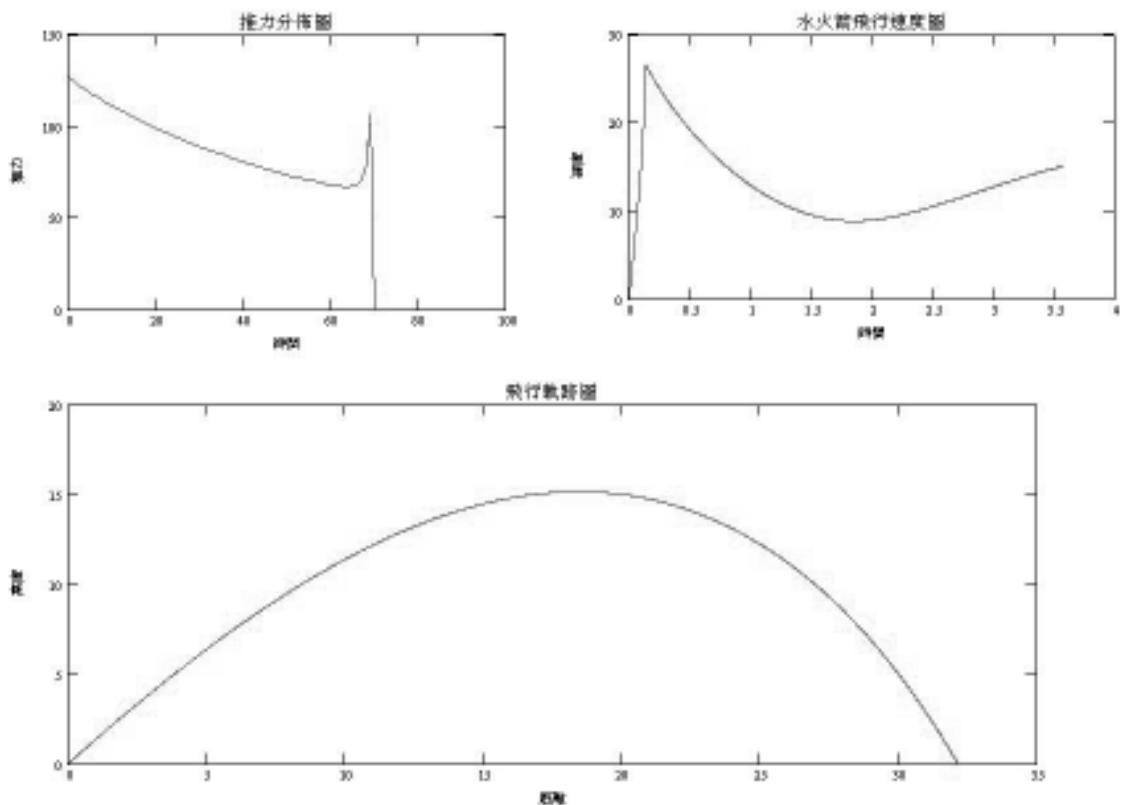
但是為了處理二維度的問題，因此我們將以上的方程式改寫。這兩條方程式有點類似斜向拋射的簡單問題，但是其中的空氣阻力與水火箭的噴射推進角度有點複雜。我們盡可能地把方程式寫的更完整一些。從新整理得到：

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\rho \cdot dV(h)}{dt} \frac{\cos(\theta)}{W_0 + \rho \cdot V(h)} \left[ \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{(V_0 - V(h)) \cdot P_0 - P_a}{V_0 - V(h)}} - K \cdot (V_x^2 + V_y^2) \right]$$

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{\rho \cdot dV(h)}{dt} \frac{\sin(\theta)}{W_0 + \rho \cdot V(h)} \left[ \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{(V_0 - V(h)) \cdot P_0 - P_a}{V_0 - V(h)}} - K \cdot (V_x^2 + V_y^2) \right] - g$$

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \right)$$

對於如此怪異的方程式，真的用『怪異』還不足以形容，解決的方法還是用數值分析吧！對於不熟悉數值分析的朋友，可能要跟您說聲抱歉。因為我們的主題是要強調水火箭的物理觀念，至於數學的細節部分則予以保留。經過我們多方嘗試 (Multi-Steps Runge-Kutta) 來進行疊代計算，而得到的計算結果如下。



## 說明一

這次利用黑松汽水的胖胖瓶作為數值計算的對象。它的體積是 2.12 公升，注入約 13 公分高的水位（略少於三分之一的瓶子總體），最末打入三大氣壓後以仰角 70 度發射。我們計算得到的結果如下：

1. 噴射水花將於 0.14 秒耗盡
2. 最遠射程 32.1 公尺
3. 最大射高 15.1 公尺
4. 落地速度每秒 15.1 公尺
5. 飛行時間 4 秒

## 說明二

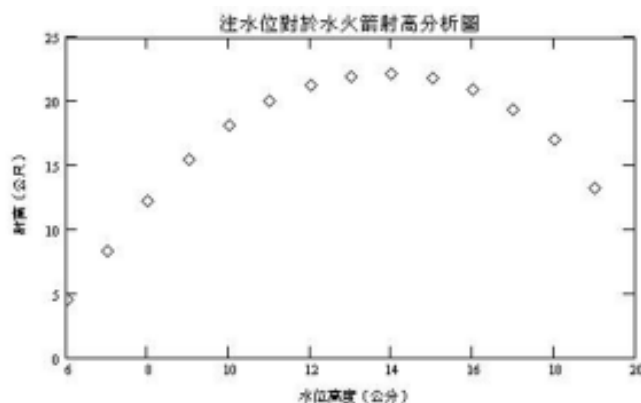
我們若是以同樣的條件（在黑松汽水的胖胖瓶打入三大氣壓後垂直發射）來探討，到底裝入多高水位才能讓水火箭的飛行達最大高度？這真是一個好問題！為了簡單且明瞭來說明，我們還是看一下數學的計算結果，並繪圖如右。

我們發現注入水位 14 公分可射高達 22.13 公尺，相當於注入 847cc 的水量。

## 結語

到此，您有沒有發現水火箭好像太複雜了，而且複雜的一點都不好玩呢！其實這次主題雖然談的不多，但是已經交代了整個火箭的噴射推進原理。說真的，這是一個活生生的彈道學題目！

雖然我們在此僅以水火箭作為噴射推進分析的例子，關鍵性地解決水花噴射的流體力學問題，而其中卻忽略了不少的細節。例如，利用白努力方程式來解決流體力學的問題時，流體的黏性與紊流所造成的動能損耗是忽略不計的。另外用數學



Mutliti-steps Runge-Kutta的數值分析也只能得到方程式的近似解。

從初始的發射過程進行推力分析與質量分析，最後經由射程方程式完成彈道落點估計。儘管這次水火箭的理論分析，從不考慮水的黏性力造成紊流而導致推進效率減少的情形以及數值計算的誤差（相信這是一件非常棘手的問題！）。不過理論分析的最大好處，在於提供水火箭的設計細節。如果我們可以事先知道水火箭的飛行能力，將有助於正確地提升水火箭的飛行性能。如果我們還可以依據風向修正並預估水火箭的落點，這無疑是玩水火箭的最高境界了！或許這部分將留待有興趣的讀者繼續研究了。最後我們用很嚴肅的態度來看待這件事，雖然遊戲用的水火箭非常有趣，但是必須要留意自身以及周遭的安全。

科學實驗室是一個無所不談的園地。只要生活與科學、遊戲與工程等相關主題，我們都願意投入研究。歡迎您給予寶貴意見並提供您對自然科學的研究心得。終於，這一期的科學實驗室要落幕了。若有任何細節上的問題，歡迎隨時聯絡。

**我們的電話：02-28314551 分機 302**

**或網站：[www.tam.gov.tw](http://www.tam.gov.tw)**

**推薦的網站如下：**

<http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/5402/>

提供水火箭即時模擬飛行計算，理論教學等。

<http://www.osa.com.au/~cjh/rockets/>

作者：現職台北市立天文科學教育館