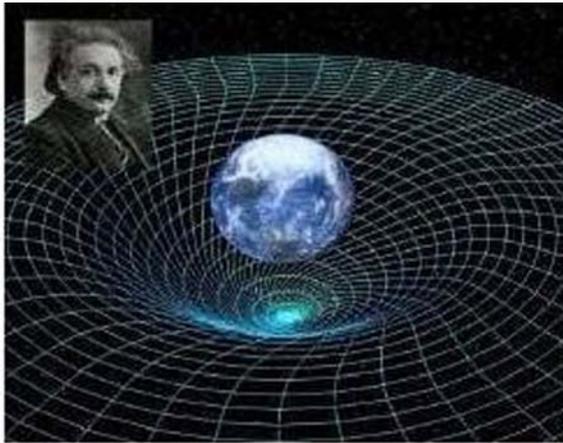


Newton's fixed space



Einstein's flexible space-time

←圖1. 愛因斯坦的相對論手稿(下)與廣義相對論時空觀概念圖(左)。

文/石中達

淺談相對論

從幾何學談起

一 歐式幾何與黎曼幾何

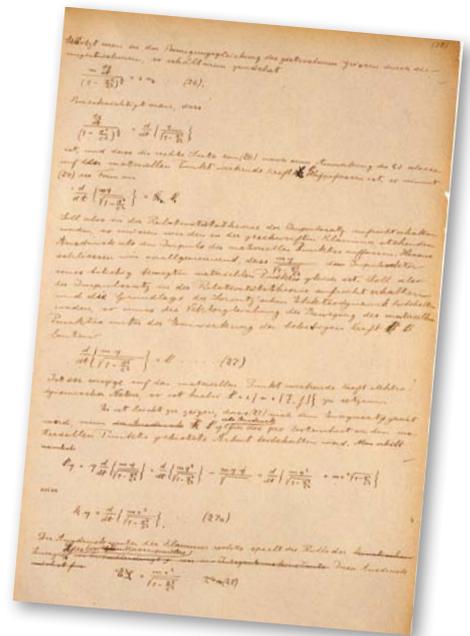
什麼是黎曼幾何 (Riemannian geometry) ? 國中、高中所學的幾何都是歐式幾何 (或稱平面幾何), 適用於平坦表面問題的作圖及解析, 例如「三角形的內角和等於180度」是大家耳熟能詳的定理。但是自然界並非平面 (例如馬鞍面、球面等), 當遇到有曲率的表面時, 歐式幾何就不適用, 就要使用黎曼幾何, 黎曼幾何又稱橢球幾何, 然而黎曼幾何與愛因斯坦的相對論又有什麼關係呢? 說到這, 我們先來談談愛因斯坦對「時間」、「空間」、「同時性」、「加速度」、「重力場」等超乎常人的想法和見解。

古典力學、慣性參考系 與伽利略變換

古人觀測天象, 歸納天體運行的規律, 其中, 克卜勒的行星運動三大定律能準確的描述行星運動

的方式, 克卜勒第一定律指出「行星繞太陽的軌道是橢圓形」, 但是造成物體運動的

原因是什麼呢? 於是就想到「力」, 伽利略認為造成物體運動的原因並不是「力」, 但「力」是改變物體運動狀態的原因, 爾後牛頓研究圓周運動時指出, 如果一個物體做等速圓周運動, 會受到一個向心力; 但是行星繞太陽運行的軌道是橢圓形, 這是由什麼力造成的呢? 1684年虎克、哈雷、雷恩在討論天體運行的橢圓軌道時, 牛頓成功導出星體間「引力」的大小與它們之間的距離平方成反比的關係, 並於他的《自然哲學的數學原理》巨著中提出萬有引力定律 $F=GMm/R^2$ 。此外, 牛頓三大運動定律為古典力學的基石, 牛頓第一運動定律 (慣性定律) 指出, 一個不受外力或所受外力合等於0的物體, 靜者恆靜、動者恆等速直線運動; 牛頓第二運動定律 (運動定律) 則說明物體的加速度與物體所受到的外力成正比; 牛頓第三定律為作用力與反作用力定律。



但如何描述物體的運動狀態呢？為了描述物體運動所選用的座標系，必須能以最簡單的形式呈現物理定律，且必須可重複實驗驗證，所以慣性參考系（即在時間和空間上具有同質性的座標系）就被廣為使用，在慣性參考系下，物體運動都會遵循牛頓力學定律，然為處理在不同的慣性參考系下測量結果的轉換，就需使用「伽利略變換（Galilean transformation）」，但當慣性坐標系之間的相對速度大到接近光速時，伽利略變換是否仍然有效呢？

我們感受到的時間與空間 與運動狀態有關嗎

一般都認為時間、空間是相互獨立、永恆不變的，可稱其為「絕對的時空觀」。在這個概念下，不同的運動物體所感受到的時空是一樣的，以絕對時空觀為基礎的牛頓運動定律可應用於小至質點、大至星體的運動，牛頓在《自然哲學的數學原理》一書中闡述他的時空觀－絕對的空間其本質與外界事物無關、它從不運動而且永恆不變，至於時間，其本質是自行均勻流逝的，與外界事物無關。

勞倫茲變換與狹義相對論

在不同的慣性參考系下觀測，其觀測結果雖可以伽利略變換加以轉換，但伽利略變換不適用於電磁學理論，馬克斯威爾的電磁場方程式顯示「真空中的光速是一定值」，真空中的光速不隨參考系的不同而改變，那麼，其問題的原因是在牛頓力學、馬克斯威爾方程式、還是伽利略變換，為了解決此一問題，人們設想一種傳播光的介質「乙太」，荷蘭物理學家勞倫茲提出了「勞倫茲變換（Lorentz transformation）」並試圖解釋光在乙太中傳播的現象，然而邁克爾遜－莫雷實驗（Michelson-Morley Experiment）卻證實了乙太不存在，真空中光速在任何參考系下都是相同的，愛因斯坦於是修正牛頓理論，提出時間和空間不是絕對的，絕對不變的是真空中的光速，愛因斯坦依據光速不變的假設，重新推導並詮釋勞倫茲變換，由於光速在任何慣性參考系中都保持不變，則絕對的時間是不存在的，在某一參考系中看到同時發生的事件在另一參考系中看來可能不是同時發生的，「同時」是具有相對性

的，宇宙中不存在一個統一而且永恆不變的時間。

1905年愛因斯坦發表狹義相對論（Special relativity），狹義相對論的基本概念就是「光速不變原理」和「相對性原理」，真空中的光速不變原理已於前述，至於「相對性原理」則是指物理規律在不同的慣性參考系下具有相同的形式。愛因斯坦認為絕對的「時間」和絕對的「空間」是不存在的，從狹義相對論可以推導出許多跟我們直覺大相逕庭的結論，事件的樣貌與觀察者的運動狀況有關，例如：當物體相對地面運動時，於地面座標系觀察運動物體時會發現物體在運動方向上的長度會收縮（長度收縮效應），運動物體座標系的時鐘與地面靜止座標系的時鐘相比指針會走的慢（時間膨脹效應），狹義相對論表明光速不僅是電磁波的傳播速度，也是四維時空的一個基本特性，此特性闡明沒有任何具有質量的粒子可以被加速到光速，這些乍看之下不合常理的現象，事實上都已經獲得證實。

然而，狹義相對論在發表之初，其理論的正確性受到許多人的質疑，其中包括馬赫（Ernst Mach）、龐加萊（Jules Henri Poincaré）、勞倫茲（Hendrik Antoon Lorentz）等著明科學家，但狹義相對論的真正弱點卻是愛因斯坦本人發現的，他發現狹義相對論的「相對性原理」中有關「物理規律在不同的慣性參考系下形式相同」的假設有問題，到底什麼是慣性參考系（Inertial frame of reference）？另外，他也思考「重力」的本質，重力是什麼？由於無法定義慣性參考系，愛因斯坦經過10年的思考，修改狹義相對論的相對性原理，並於1915年發表廣義相對論（general theory of relativity），指出在所有參考系下物理規律相同，這就是廣義相對論的相對性原理。

廣義相對論 與閔考斯基四維時空概念

廣義相對論的基本概念是「等效原理」，並把重力涵蓋進去。愛因斯坦在電梯的思想實驗中，因為電梯中的人無法分辨「重力」與「加速度」所產生效應的差別，故可將「重力」與「加速度」視為等效，從而推論出光會受到重力的影響而彎曲。

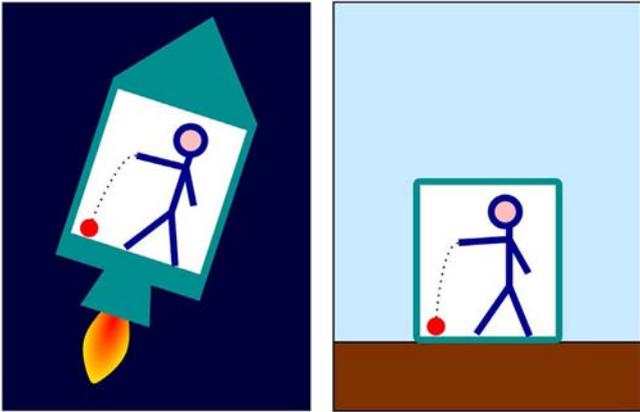


圖2. 愛因斯坦的電梯思想實驗概念圖。

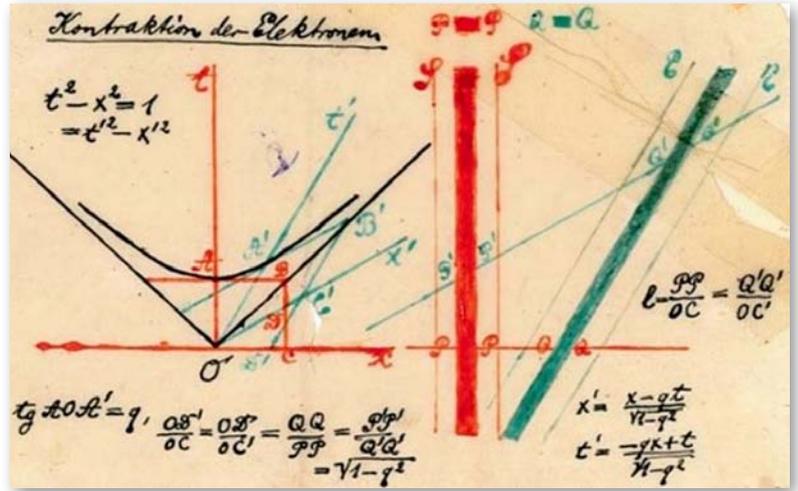
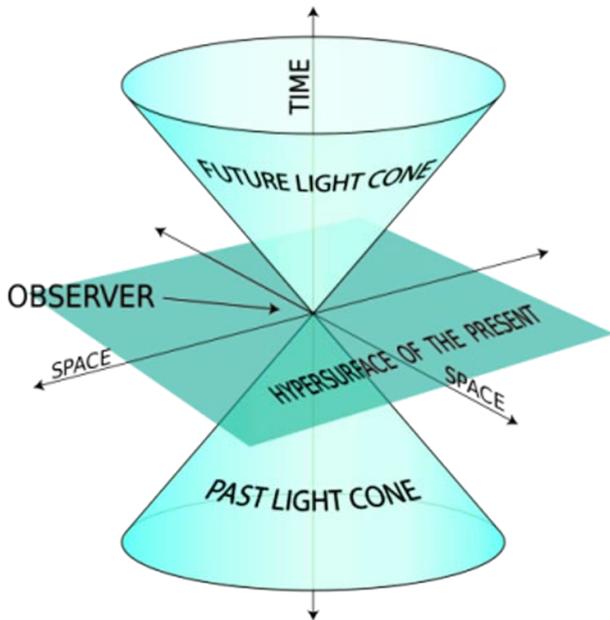


圖3. 閔考斯基的四維時空概念。



廣義相對論所討論的時間和空間不是相互獨立的，是閔考斯基（Hermann Minkowski）的四維時空概念，閔考斯基四維時空中的直線稱為測地線（geodesic），物體在四維時空中沿測地線運動，由於物質（質量）會導致時空彎曲，故廣義相對論的概念就是「物質引起時空彎曲，時空的測地線引導物質運動」，而愛因斯坦著名的重力場方程式就是描述物質造成時空彎曲的數學方程式，重力場方程式是二階張量微分方程式組，廣義相對論重力場方程式的建立與數學（黎曼幾何、微分幾何）密不可分，廣義相對論指出，在四維時空中如果觀察者所處的座標系變了，時空座標軸就會旋轉，事件在時間軸和空間軸上的投影也就會發生變化，因而在不同的坐標系下，時間的長度和空間的距離也就會隨之發生變化。

廣義相對論的實驗驗證

（一）水星軌道近日點的進動現象解釋

依據水星的歷史觀測資料，水星軌道近日點的進動每100年約5,600角秒，依牛頓定律計算每100年約進動5,557角秒，與觀測結果差43角秒，但通過廣義相對論的計算就可解釋其偏差是由於太陽造成時空扭曲所產生的。

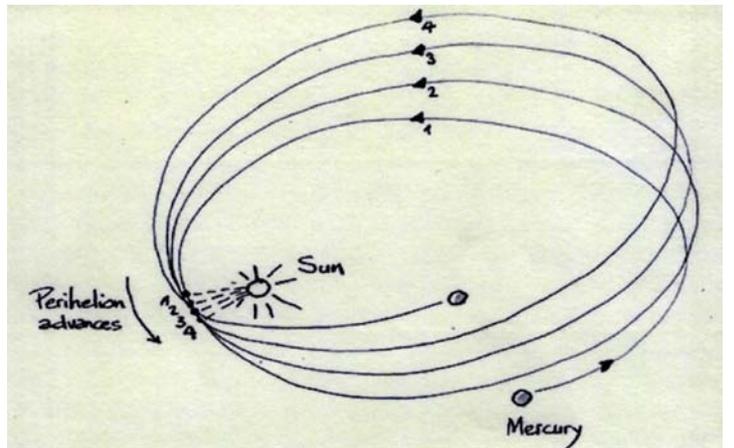
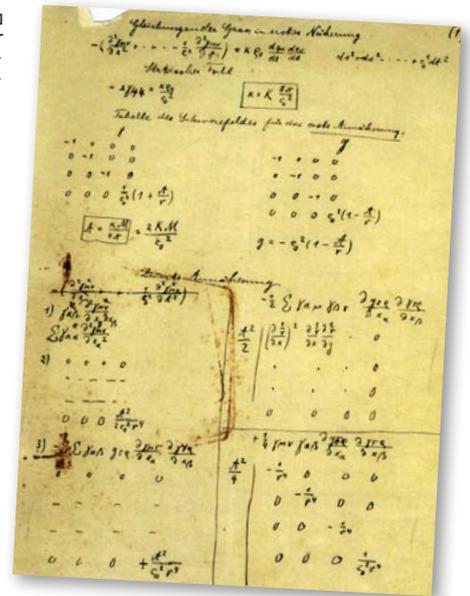


圖4. 水星軌道近日點的進動現象與愛因斯坦手稿。

(二) 光會受重力影響產生偏折

在日全食時測量背景星空恆星位置的變化可檢驗愛因斯坦廣義相對論的預言，1919年愛丁頓於日食時測量的星光（畢宿星團的恆星）偏折為1.61角秒，依牛頓定律計算星光的偏折約0.875角秒，然依廣義相對論計算星光的偏折約1.75角秒，證實愛因斯坦的預言。

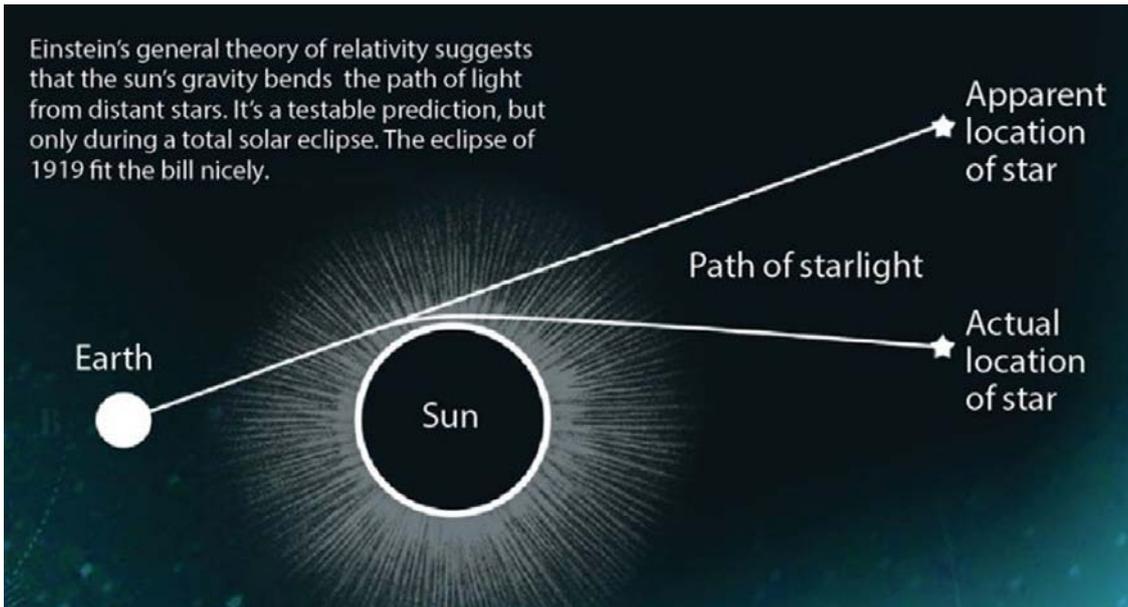
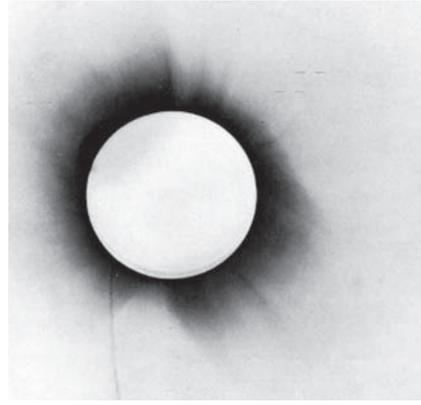


圖5. 1919年愛丁頓於日食時測量的星光偏折示意圖。

(三) 光會受重力影響產生紅移現象

1959年羅伯特·龐德（Robert Vivian Pound）和格倫·雷布卡（Glen Anderson Rebka）在哈佛大學22.6公尺高的傑弗遜塔進行龐德-雷布卡實驗，測得塔頂部和底部的兩個 γ 射線源在地球重力場中的相對紅移，證實了光的重力紅移現象。

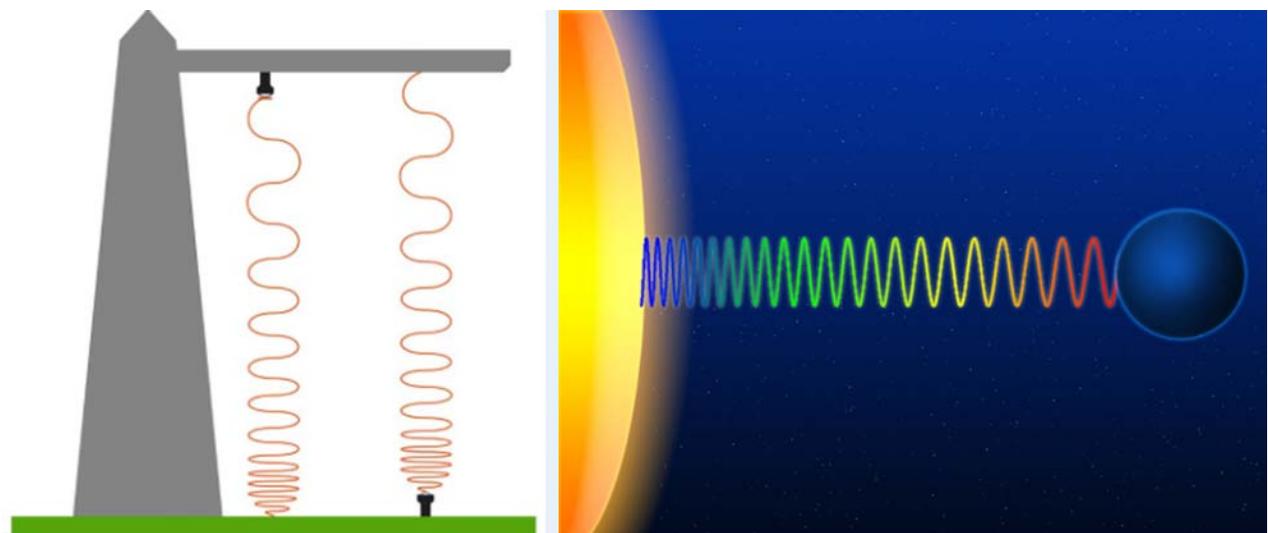


圖6. 龐德-雷布卡實驗及光的重力紅移現象示意圖。

(四) 重力波

由於廣義相對論認為任何訊息的傳播速度不可能超過光速，如果大質量雙星互繞，因重力場的變化所造成的時空扭曲會以波的形式向外擴散，此即愛因斯坦預言的重力波，2015年9月14日LIGO團隊首次觀察到由黑洞合併產生的重力波，證實了重力波的存在。

(五) 時鐘的計時會受重力影響

1971年哈菲爾（Joseph Carl Hafele）和基廷（Richard E. Keating）使用飛機進行實驗，比對飛機上的原子鐘和地面上的原子鐘，證實時鐘計時會因運動狀態而改變，此即為哈菲爾-基廷（Hafele-Keating）實驗，所以如果太空船以接近光的速度飛行或是靠近黑洞時，則有時鐘變慢現象。



↑↓圖7. 哈菲爾-基廷（Hafele-Keating）實驗。

結語

哈伯定律雖表明宇宙在膨脹，但我們對宇宙膨脹的模式、暗物質與暗能量等知之甚少，天文館展示場3樓有宇宙、星系的圖文及影音互動等多媒體，歡迎來天文館一窺宇宙的秘密，領略浩瀚宇宙之美。

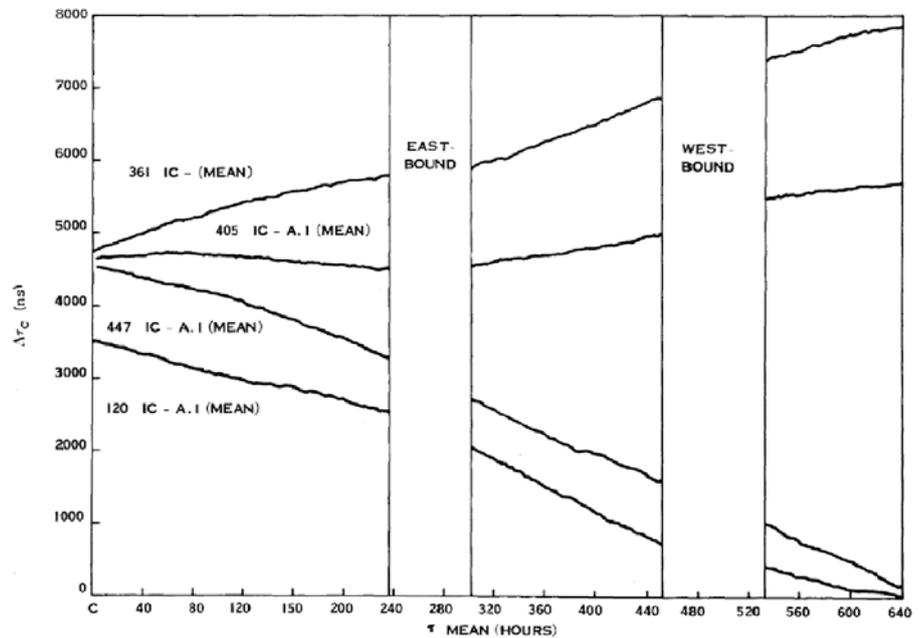


Figure 2. MEASURED VALUES OF $\Delta\tau_C$ VS τ MEAN FOR EACH CLOCK TAKEN BEFORE, BETWEEN, AND AFTER TRIPS

石中達：臺北市立天文科學教育館視聽組組長

YouTube相關影片：



探索14-2講座：廣義相對論的新世紀 — 從難以置信到不可或缺 / 陳義裕教授
<https://www.youtube.com/watch?v=g0IXyl4FQ6Q&t=1581s>



What is General Relativity?
<https://www.youtube.com/watch?v=DYq774z4dws>