

第 3 單元：史瓦西半徑

(適合國中 8 年級以上)

如果你把一物質壓縮得足夠小，最終就會得到一個黑洞，而且在一定的距離內，光再也無法逃脫，「史瓦西半徑」就是指任何物質都有的這個臨界距離的特徵半徑。對於一個典型的非旋轉黑洞而言，其史瓦西半徑即代表黑洞的大小，這是因為黑洞的大小被定義為連光也無法逃脫的範圍。黑洞的史瓦西半徑也被稱為「事件視界」。如果特定質量的物質被壓縮進入此半徑之內，則沒有任何已知的力量能夠阻止該物質由於自身的重力而壓縮成一個黑洞。因此，任何物體都可以計算出一個史瓦西半徑 R ，而大小取決於物質的質量 M ，史瓦西半徑的計算公式如下：

$$\text{公式 3-1: } R = \frac{2GM}{c^2}$$

c 為光速： 3×10^8 m/s (公尺/秒)，

G 為萬有引力常數： 6.67×10^{-11} N m²/kg² (牛頓 公尺²/公斤²)

練習 3-1：

計算一個 70 公斤的人的史瓦西半徑 (公尺)。並用質子的直徑 (約為 10^{-15} 公尺) 與答案做比較。

答案：

代入公式 3-1 計算：

$$R = \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 70}{(3 \times 10^8)^2} = 1.04 \times 10^{-25} \text{ 公尺。}$$

質子的直徑約為 10^{-15} 公尺。

即 70 公斤人的史瓦西半徑約為質子直徑的 10^{-10} 倍，即百億分之一個質子大小。

練習 3-2：

計算木星的史瓦西半徑 (公尺)。木星質量為 1.9×10^{27} 公斤。
將此答案與練習 2-4 相比對。

答案：

代入公式 3-1 計算：

$$R = \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 1.8786 \times 10^{27}}{(3 \times 10^8)^2} = 2.8 \text{ 公尺。}$$

此答案與練習 2-4 相同。

練習 3-3：

計算太陽的史瓦西半徑 (公里)。太陽質量為 1.99×10^{30} 公斤。

答案：

代入公式 3-1 計算：

$$R = \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 1.9 \times 10^{30}}{(3 \times 10^8)^2} = 2.95 \times 10^3 \text{ 公尺，即 2.95 公里。}$$

練習 3-4：

由練習 3-3 的答案，我們可以化簡公式 3-1。如果一物質的質量 M 以太陽質量為單位，史瓦西半徑 R 以公里為單位。則 $R = X M$ ，試求係數 X 。
將此答案與練習 2-3 相比對。

答案：

由於 $R = X M$ ，且我們知道對於太陽質量的黑洞，史瓦西半徑約為 2.95 公里。所以，係數 X 為 2.95 (公里/太陽質量)。

在練習 2-3 中，關係式為 $R = S M$ ，其中 S 為 0.88 (公分/地球質量)。將單位進行轉換，1 公里 = 100,000 公分，太陽質量約等於三十萬倍地球質量。

$X = 2.95 \times 100,000 / 300,000 = 8.8$ ，與 S 相等。

練習 3-5：

藉由練習 3-4 的答案，簡單計算銀河系的史瓦西半徑（公里）。假設銀河系質量約為太陽的 2,500 億倍。並用太陽系的半徑（假設為 45 億公里）與答案做比較。銀河系半徑及太陽系半徑皆為約略估算值。

答案：

代入 $R = X M$ ，銀河系的史瓦西半徑 $= 2.95 \times 250,000,000,000 = 7.4 \times 10^{11}$ 公里。
約為太陽系半徑的 160 倍。

此練習中的銀河系半徑及太陽系半徑皆為約略估算值。此練習的目的是為了估計，如果將銀河系壓縮成黑洞，其半徑將會是太陽系的幾百倍。