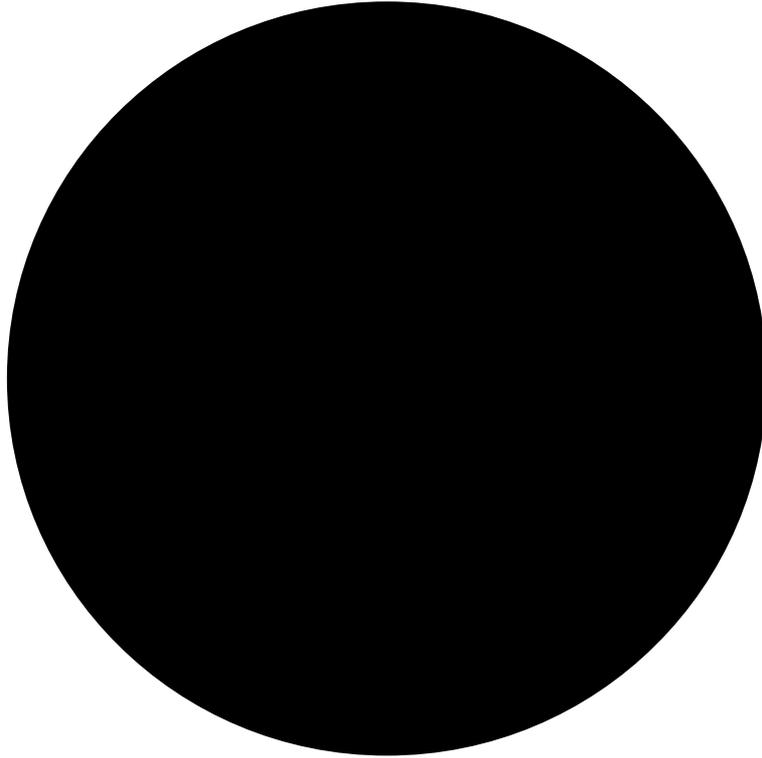


第 6 單元：軌道速度

(適合高中以上)

下圖所示的這個黑色球體的尺寸正好是直徑為 10 公分的黑洞。這樣大小的一個黑洞的質量超過我們地球質量的 5 倍。所有質量都將存在於這樣大的球體內部。為了方便起見，以下練習都將以上圖所示的「小黑洞」為例，即黑洞大小為半徑 5 公分，質量為 5 倍地球質量。



從練習 4-1 得知，即便如此小的黑洞，當你靠近它幾千公里時，你會被自己的重量壓死！或者從練習 5-2 得知，當你靠近小黑洞時，義大利麵效應會非常劇烈，無論如何，最終你都會粉身碎骨。現在假設你可以抵抗上述的效應，然而，為了保持在黑洞周圍的軌道上不要墜入其中，你必須以特定的速度移動，以抵抗黑洞的引力。這個速度稱為「軌道速度」，它取決於你與黑洞的距離，公式如下所示：

$$\text{公式 6-1: } V_{orbit} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

R 為與黑洞中心的距離。

M 為黑洞質量。

G 為萬有引力常數： $6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ (牛頓 公尺²/公斤²)

練習 6-1：

假設一顆迷你衛星在距離這個黑洞中心 1,000 公里的地方運行，它的軌道速度會是多少？

答案：

將數字代入公式 6-1， $R = 1,000,000$ 公尺， $M = 5 \times 5.9 \times 10^{24}$ 公斤。

$$V_{orbit} = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5 \times 5.9 \times 10^{24}}{10^6}} = 44 \text{ km/s}。約時速 16 \text{ 萬公里}。$$

練習 6-2：

如果一顆迷你衛星在距離這個黑洞中心 15 公分的地方運行，它的軌道速度是多少（以光速百分比表示）？

答案：

將數字代入公式 6-1， $R = 0.15$ 公尺。

$$V_{orbit} = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5 \times 5.9 \times 10^{24}}{0.15}} = 1.15 \times 10^8 \text{ m/s}。光速為 $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ，軌道速度約為光速的 38%。$$

練習 6-3：

根據公式 6-1，找出衛星在何種半徑 R 時，其繞行速度等於光速，並將該答案與黑洞的事件視界半徑進行比較。

答案：

將數字代入公式 6-1， $R = \frac{GM}{c^2}$ 。

此時軌道半徑為事件視界的一半！這和黑洞的概念不符合，因為任何物體進入黑洞的事件視界都和外部宇宙失去聯繫，所以物體在進入事件視界時必須是光速的（不考慮磁場等複雜情況）。這樣才能保證任何物體在黑洞內以光速發出的訊息都不會往外傳播。如果將公式 6-1 套用於無限靠近黑洞的任何距離，會得到不管離黑洞多近都可以存在繞行黑洞的衛星軌道，這是不對的。

根據練習 6-2 的結果，距離一個半徑為 5 公分的黑洞 15 公分遠的地方，軌道速度約為光速的 38%。這個結果是基於牛頓力學的計算，但在如此靠近黑洞的強引力場中，需要使用廣義相對論進行更精確的計算。此外，由於物體以如此高速運動，還必須加入狹義相對論的修正。而廣義相對論的修正要求了存在最內穩定軌道，任何物體（包括衛星）都會沿著半徑方向加速，使得物體在進入黑洞的事件視界時為光速，在進入黑洞後和外部宇宙失去聯繫。

在更靠近黑洞周圍，強大的引力會使光線彎曲，最終在距離黑洞半徑 1.5 倍的地方，會形成一個不穩定的光子軌道。這是光子可以繞行黑洞的最內側軌道。由此不穩定圓形軌道逃逸的眾多光線形成環繞中央陰影的光環，烘托出了黑洞的輪廓。事件視界望遠鏡團隊公布的黑洞影像具有環狀的特徵，其光環也是由光子不穩定軌道所造成。

總結而言，對衛星來說，在黑洞的最內穩定軌道之外，不同距離都可以存在一個穩定圓形軌道。對光子來說，在不旋轉的黑洞附近，則只在特定距離存在一個（不穩定）的圓形軌道。

下圖為美國太空總署 (NASA) 製作「黑洞引力扭曲周圍的光線」的模擬圖，呈現「重力扭曲時空結構」的黑洞輪廓。

