

第 7 單元：時間膨脹效應

(適合高中以上)

根據愛因斯坦的狹義相對論，測量相對高速運動的慣系座標系統時，在該座標的時間會減慢，或稱為時間膨脹。時間膨脹效應的公式為：

$$\text{公式 7-1 : } T_0 = \frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

T 為相對移動中的坐標系時間。

T₀ 為相對靜止係測到相對移動中的坐標系時間。

c 為光速。

而從廣義相對論的等效原理，我們可以把重力位能與動能的速度做相對應的轉換，即當你在距離質量 M 的黑洞中心距離為 r 的地方，速度 v 為：

$$\text{公式 7-2 : } v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

G 為萬有引力常數：6.67×10⁻¹¹ N m²/kg² (牛頓 公尺²/公斤²)

當在質量 M 的黑洞的事件視界時，速度即為光速：

$$\text{公式 7-3 : } c = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

R 為黑洞的半徑。

將公式 7-2、7-3 帶入 7-1，即得到：

$$\text{公式 7-4 : } T_0 = \frac{T}{\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}} \quad , \quad \text{且 } r > \frac{2GM}{c^2}$$

從公式 7-4 得知，在距離黑洞越近的地方，時間過得越慢！而時間在事件視界上將靜止（無限膨脹）。

練習 7-1:

請計算當你在距離一個太陽質量黑洞中心 10 公里的地方，相對於遠處靜止觀察者而言，時間膨脹效應是多少？

答案：

將數字代入公式 7-4, $r=10$ 公里, $M=1.99\times 10^{30}$ 公斤。 $T_0 = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 1.99 \times 10^{30}}{10,000 \times (3 \times 10^8)^2}}}$,

即 $T_0=2.6T$ ，時間膨脹效應為 2.6 倍。

這表示在距離一個太陽質量黑洞中心 10 公里的地方過了 1 秒鐘，遠處靜止觀察者則已經過了 2.6 秒。

練習 7-2:

假設現在有一艘太空船，從地球出發前往遠處的黑洞。請分別以地球的觀察者，以及太空船上的觀察者，描述太空船抵達黑洞之前的場景。

答案：

地球上的觀察者：

對於地球上的觀察者來說，隨著太空船接近黑洞，時間膨脹效應會變得越來越明顯。當太空船靠近黑洞的事件視界時，地球上的觀察者會看到太空船的動作變得極其緩慢，船員的動作也會變得越來越緩慢，直到看起來幾乎停滯不前。時間停止的位置就是當太空船在黑洞的事件視界。從地球上的角度看，太空船似乎永遠無法真正進入黑洞的事件視界，而是無限緩慢地接近它。

太空船上的觀察者：

對於太空船上的觀察者來說，地球看起來越來越暗淡並且移動緩慢。但他們自己並不會感受到時間的改變。他們的時間進程和地球上的時間進程是一樣的，從他們的視角看，他們的旅程是正常進行的。因此，太空船將順利抵達黑洞並跨過事件視界。